Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика
Катедра “Приложна математика и моделиране”

“Компютърни числени методи”
ЛЕКЦИЯ 7

Проф. д-р Снежана Гочева-Илиева, snow@uni-plovdiv.bg

<u>Он-лайн обучение:</u> www.fmi-plovdiv.org/evlm
www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg - числени методи

<u>Литература:</u>

1. Бояджиев Д., Гочева С., Макрелов И., Попова Л. – Ръководство по числени методи – част 1, Издания: 2003, 2006, 2010.
2. Семерджиев Х., Боянов Б., Числени методи, ПУ.
3. Гочева-Илиева С., Въведение в система Mathematica, ЕксПрес, Габрово, 2009.

Съдържание

Интерполационен кубичен сплайн

1. Интерполационни сплайни – кубичен сплайн

Разгледахме случая на линеен и квадратичен интерполационен сплайн. Аналогично поставяме и задачата за кубичен сплайн.

Нека $y = f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $[a,b]$ и е известна таблица от стойности $y_i = f(x_i)$ в точките (възлите) $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$. Стъпките между x_{i-1} и x_i ще означаваме с $h_i = x_i - x_{i-1}$. Нека таблицата е:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

Дадохме следното *Определение.*

Интерполационният сплайн $S_k(f,x)$ от ред k е функция, за която:

(1) $S_k(f,x)$ е полином $f_i(x)$ от степен k във всеки подинтервал $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

(2) $S_k(f,x)$ интерполира функцията, т.е. $S_k(f,x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$.

(3) $S_k(f,x)$ и производните му до ред (k-1) са непрекъснати в $[a,b]$.

Кубичен сплайн

Тук k = 3 и във всеки подинтервал $[x_{i-1},x_i], i=\overline{1,n}$, сплайнът $S_3(f,x)$ е полином от трета степен. Така търсим коефициентите a_i, b_i, c_i, d_i, които определят сплайна, т.е. 4n неизвестни.

Извод на формулите за кубичен сплайн $S_3(x)$

Аналогично на линеен и квадратичен сплайн търсим S_3 във вида:

$\boxed{S_3(x) = f_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3}$ за $x \in [x_{i-1}, x_i]$, i=1,... n,

при условията:

$\boxed{f_i(x_{i-1}) = y_{i-1}}$, $\boxed{f_i(x_i) = y_i}$ i=1,…,n - интерполиране, (2n условия) (2)

$S_3'(x)$, $S_3''(x)$ са непрекъснати във вътрешните точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$:

$\boxed{f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i)}$ (n-1 условия), (3*)

$\boxed{f_i''(x_i) = f_{i+1}''(x_i)}$ (n-1 условия). (3**)

Или имаме общо 4*n*-2 условия за намиране на 4*n* неизвестни. Две условия остават свободни. Следователно кубичният сплайн е единствен при задаване на две допълнителни условия. В таблицата по-долу те са означени с γ_1 и γ_2. По-точно тук разглеждаме условията: $S_3''(a) = 2c_1 = l_1 = \gamma_1$ и $S_3''(b) = 2c_n + 6d_n h_n = l_{n+1} = \gamma_2$.

Ако $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ сплайнът се нарича **естествен** кубичен сплайн.

Могат да се задават и редица други типове допълнителни условия, например $S_3'(a) = \gamma_1$ и $S_3'(b) = \gamma_2$, както и различни комбинации с по-горните условия, периодични условия и др.

Обща формула на кубичен сплайн

$$S_3(x)=\begin{cases} f_1(x)=a_1+b_1(x-x_0)+c_1(x-x_0)^2+d_1(x-x_0)^3, & x\in[x_0,x_1] \\ \dots & \\ f_i(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3, & x\in[x_{i-1},x_i] \\ \dots & \\ f_n(x)=a_n+b_n(x-x_{n-1})+c_n(x-x_{n-1})^2+d_n(x-x_{n-1})^3, & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

За намиране на коефициентите a_i, b_i, c_i, d_i:

А) От условия (2) при $i=\overline{1,n}$:

$$f_i(x_{i-1})=y_{i-1}=a_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_i=y_{i-1}} \quad (4)$$

$$f_i(x_i)=y_i \quad \Rightarrow \quad a_i+b_i(x_i-x_{i-1})+c_i(x_i-x_{i-1})^2+d_i(x_i-x_{i-1})^3=\boxed{a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3=y_i} \quad (5)$$

Б) За условие (3*) изчисляваме първите производни отляво на x_i: $f_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2 \quad \Rightarrow \quad f_i'(x_i) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$;

и отдясно: $f_{i+1}'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2 \quad \Rightarrow \quad f_{i+1}''(x_i) = b_{i+1}$.

За да има непрекъснатост на $S_3'(x)$ във всяка вътрешна точка $x = x_i$ искаме лявата и дясната производна да са равни

$\boxed{b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2}$ (6) при $i = \overline{1, n-1}$.

C) Аналогично за условие (3**) изчисляваме вторите производни

отляво на $x_i \Rightarrow \quad f_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) \quad \Rightarrow \quad f_i''(x_i) = 2c_i + 6d_i h_i$

и отдясно на $x_i \Rightarrow \quad f_{i+1}''(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i) \quad \Rightarrow \quad f_{i+1}''(x_i) = 2c_{i+1}$.

За да има непрекъснатост на $S_3''(x)$ двете трябва да са равни в x_i:

$\boxed{2c_{i+1} = 2c_i + 6d_i h_i}$ (7) при $i = \overline{1, n-1}$.

Така получаваме системата от 4n-2 уравнения (4)-(7) за a_i, b_i, c_i, d_i.

По-нататък означаваме за удобство $\boxed{l_i = 2c_i}$ и ще изразим всички коефициенти чрез тези неизвестни l_i.

Веднага $\boxed{c_i = \dfrac{l_i}{2}}$, при $i = \overline{1, n-1}$. (8)

От (7) изразяваме $d_i = \dfrac{2c_{i+1} - 2c_i}{6h_i}$ или

$$\boxed{d_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{6h_i}} \text{ при } i = \overline{1, n-1}. \tag{9}$$

Като заместим в (5) тези c_i, d_i и a_i от (4), намираме за b_i

$$b_i = \frac{y_i - a_i - c_i h_i^2 - d_i h_i^3}{h_i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{l_i h_i}{2} - \frac{(l_{i+1} - l_l)h_i}{6} \Rightarrow$$

$$\boxed{b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i(l_{i+1} + 2l_i)}{6}}. \tag{10}$$

Накрая замествайки в (6) изразите за a_i, c_i, b_i, d_i от (4),(8),(9),(10):

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{h_{i+1}(l_{i+2}+2l_{i+1})}{6}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i(l_{i+1}+2l_i)}{6}+l_ih_i+\frac{h_i(l_{i+1}-l_i)}{2}.$$

След елементарни преобразования намираме:

$$h_il_i+2(h_i+h_{i+1})l_{i+1}+h_{i+1}l_{i+2}=6\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right),\text{ при } i=\overline{1,n-1}.$$

Като добавим двете допълнителни условия при $i=0$ и $i=n$ получаваме напълно определена система относно спомагателните неизвестни l_i.

Разписана тя има тридиагонален вид с преобладаващ главен диагонал – виж (11). Може да се решава с метода на прогонването, който е устойчив (Защо?).

$$
\left|\begin{array}{llllll}
l_1 & & & & & = \gamma_1 \\
h_1 l_1 & +2(h_1+h_2) l_2 & +h_2 l_3 & & & = 6\left(\dfrac{y_2-y_1}{h_2}-\dfrac{y_1-y_0}{h_1}\right) \\
& & \ldots & & & \\
& h_{i-1} l_{i-1} & +2(h_{i-1}+h_i) l_i & +h_i l_{i+1} & & = 6\left(\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\dfrac{y_{i-1}-y_{i-2}}{h_{i-1}}\right) \\
& & & \ldots & & \\
& & & & l_{n+1} & = \gamma_2
\end{array}\right. \qquad (11)
$$

Коефициенти на кубичния сплайн

$$
a_i = y_{i-1}, \quad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(l_{i+1} + 2l_i), \quad i = \overline{1,n}
$$

$$
c_i = \frac{l_i}{2}, \quad d_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{6h_i}, \quad i = \overline{1,n-1} \qquad (12)
$$

2. Алгоритъм за намиране на кубичен сплайн

и приближаване на стойност на функцията $y = f(x)$ в точка $x = \tilde{x}$:

1. Изчисляват се стъпките h_i.
2. Решава се тридиагоналната система (11).
3. Изчисляват се коефициентите на сплайна по (12).
4. Намира се в кой подинтервал се намира точката $\tilde{x}$, нека напр. това е интервалът $[x_{p-1}, x_p]$.
5. Изчислява се приближението по формулата в този подинтервал

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}) = a_p + b_p(\tilde{x} - x_{p-1}) + c_p(\tilde{x} - x_{p-1})^2 + d_p(\tilde{x} - x_{p-1})^3.$$

Кубичен сплайн при равноотстоящи възли:

$$h = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}$$

$$a_i = y_{i-1}, \quad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(l_{i+1} + 2l_i), \quad i = \overline{1,n}$$

$$c_i = \frac{l_i}{2}, \quad d_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{6h}, \quad i = \overline{1,n-1}$$

$$\left|\begin{array}{llllll} l_1 & & & & & = \gamma_1 \\ l_1 & +4l_2 & +l_3 & & & = \dfrac{6}{h^2}\left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) \\ & & \ldots & & & \\ & l_{i-1} & +4l_i & +l_{i+1} & & = \dfrac{6}{h^2}\left(y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}\right), \\ & & & \ldots & & \\ & & & & l_{n+1} & = \gamma_2 \end{array}\right. \qquad (13)$$

3. Теорема за оценка на грешката при интерполиране с кубичен сплайн (без доказателство).

Нека функцията $f(x) \in C_{q+1}[a,b]$, $0 \le q \le 3$.

То интерполационният кубичен сплайн $S_3(x)$, получен по таблица на функцията във възлите $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ удовлетворява оценките:

$$\max_{[x_k, x_{k+1}]} \left| f^{(i)}(x) - S_3^{(i)}(x) \right| \le C h^{q+1-i} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(q+1)}(x) \right|, \qquad (14)$$

където $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $i = 0, \ldots, q$, $h = \max_k h_k$, C е константа, независеща от k, h и f.